MIDTOETS ALGEBRA , 29 JANUARI 2003, 14.00–17.00

(1) Geef alle vier ondergroepen van de optelgroep $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Leg daarbij duidelijk uit waarom er niet meer ondergroepen zijn.

(2) Leg uit waarom elke groep G die precies 29 elementen heeft, isomorf is met de optelgroep $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$.

(3) Stel dat G een willekeurige groep is, en p een priemgetal. Leg uit dat een homomorfisme $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to G$ ofwel alles uit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ naar het eenheidselement $e \in G$ stuurt, ofwel injectief is.

(4) Bepaal de inverse van de permutatie $(1\ 2\ 3\ 5)(1\ 4\ 5)$.

(5) Waarom bestaat er, voor $n > 1$ een oneven geheel getal en voor $k > 0$ willekeurig, geen surjectief homomorfisme $g : S_k \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? (Ga na wat voor een 2-cykel τ de orde van $g(\tau)$ zou kunnen zijn).

(6) Bepaal de ordes van de permutaties $(1\ 3\ 5\ 7)(2\ 4\ 6\ 8\ 9\ 10)$ en $(1\ 3\ 5\ 7)(1\ 4\ 6\ 8\ 9\ 10)$.

(7) Leg uit waarom de groep A_4 geen ondergroep bestaande uit 6 elementen heeft.

(8) Bepaal de automorfismengroep van de graaf behorend bij de letter X (dus 5 punten, 1 in het midden en 4 die alleen met de middenste zijn verbonden).

(9) De symmetriegroep van een vierkant bestaat uit 8 elementen. Deze permuteren de 4 hoekpunten, en zo is de symmetriegroep op te vatten als ondergroep van S_4. Noem de hoekpunten 1, 2, 3 en 4, en geef de acht permutaties in deze ondergroep van S_4.